12. Oktober 2006

Lebensweltliche Grundlagen der Mathematik*

Felix Mühlhölzer
Universität Göttingen
E-Mail: fmuehlh@gwdg.de

Man könnte denken, daß nichts weiter von unserer Lebenswelt entfernt sei als die Mathematik. Denn verkörpert die Lebenswelt nicht das Konkrete schlechthin? Während sich die Mathematik, vor allem in ihrer Entwicklung seit Beginn des 19. Jahrhunderts, in geradezu schwindelerregende Höhen der Abstraktion aufschwingt. In den nächsten 30 Minuten möchte ich Ihnen vor Augen führen, wie falsch dieser Eindruck von der großen Entfernung zwischen Mathematik und Lebenswelt ist — nichts könnte falscher sein, möchte ich fast sagen. Meine Überlegungen werden dabei, wegen der Kürze der Zeit, nur sehr skizzenhaft ausfallen können und einen stark programmatischen Charakter aufweisen. Es wird mir darum gehen, die ersten Schritte zu tun zu einer Klärung der Beziehungen, die zwischen der Mathematik und unserer Lebenswelt bestehen.

Mein Ausgangspunkt — allerdings auch nicht mehr als ein Ausgangspunkt — ist der Begriff der Lebenswelt, wie wir ihn in Husserls *Krisis*-Schrift antreffen (und den ich hier nicht erläutern muß), und ich teile Husserls anti-naturalistische Motivation bei der Einführung dieses Begriffs: die Lebenswelt fungiert, wie Husserl schreibt, "als Untergrund [...] für die [...] theoretischen Wahrheiten"[1], und zwar als *irreduzible* "Evidenzquelle, Bewährungsquelle"[2] für die empirischen Wissenschaften, die nicht ihrerseits empirisch-wissenschaftlichem Zugang zu unterwerfen ist. Allerdings teile ich nicht Husserls *transzendentalen* Ansatz, der die Lebenswelt, wie jede 'Welt', als von einem 'transzendentalen Ich' 'konstituiert' ansehen möchte. Was ich im folgenden mit *dem Lebensweltlichen* meine, ist nichts anderes als eine bestimmte

---

* Vortrag, gehalten am 12. Oktober 2006 im Rahmen des DFG-Rundgesprächs *Die Rolle der Lebenswelt in Wissenschaft, Ethik und Politik* in der Carl Friedrich von Siemens Stiftung, München. — Für hilfreiche Kommentare zu einer früheren Version danke ich Simon Friederich und Sören Stenlund.

sehr elementare und vertraute Art des Handelns: des simplen Umgehens mit vertrauten makroskopischen Gegenständen, einschließlich des vorwissenschaftlichen Urteilens über sie; eine Art des Handelns, die sich in einem langen Prozeß herausgebildet hat und die unter anderem dafür maßgeblich ist, wie wir die empirische Adäquatheit einer Theorie beurteilen. Drei Dinge sind für dieses Handeln besonders charakteristisch: Erstens beruht es auf *keiner Theorie*, die *wissenschaftlichen* Ansprüchen genügt[3]; zweitens *stimmen* wir darin *intersubjektiv überein*; drittens verlangen wir dafür normalerweise entweder *keine Rechtfertigung* (viele lebensweltlichen Urteile befinden sich, wie man heutzutage sagt, in einer *default position*), oder die Rechtfertigungen besitzen selbst lebensweltlichen Charakter, indem sie auf Schritten beruhen, die nun ihrerseits vortheoretisch, intersubjektiv unstrittig und nicht rechtfertigungsbedürftig sind.

Meine Konzentration auf das *Handeln* stellt, wie schon die Ablehnung von Transzendentalphilosophie, ebenfalls eine Abweichung von Husserl dar. Aufgrund seines letztlich mentalistischen Ansatzes rückt Husserl unser *Wahrnehmen* lebensweltlicher Gegenstände in den Vordergrund auf Kosten unseres *Handelns*, insbesondere auch unseres Handelns, das die Verwendung von *Zeichen* involviert. Diese Vernachlässigung des Handelns ist ein philosophischer Fehler, und meine Fehler-Korrektur wird im folgenden unter anderem darin bestehen, Überlegungen — nicht Heideggers, sondern — des späten Wittgenstein ins Spiel zu bringen. Die zentrale Idee meiner Untersuchungen zur Mathematik liegt in dem Gedanken, daß wesentliche Züge der Mathematik schon in beträchtlichem Maße begriffen werden können, wenn wir über unsere *lebensweltliche Praxis* reflektieren. Dazu gleich mehr.

Zurück jedoch zunächst zu Husserl. Aufgrund seiner Unterbewertung des lebensweltlichen Handelns, insbesondere Symbol-Handelns, hat Husserl keinen Platz für die Mathematik *innerhalb* der Lebenswelt, und er verdirbt dadurch seine Philosophie der Mathematik. Dies zeigt sich sehr deutlich in seiner Sicht der Geometrie, die sich grob auf folgende Weise skizzieren läßt[4]: Wenn wir z.B. eine Tischplatte wahrnehmen, als Gegenstand der Lebenswelt, dann erweist sich diese Platte als nicht vollkommen glatt und nicht vollkommen eben. Wir können sie durch bestimmte praktische Verfahren glatter und ebener machen, erreichen damit aber niemals die *reine* und *ideale* Glattheit und Ebenheit, wie wir sie in der Geometrie unterstellen.

Dazu gelangen wir nur durch einen gedanklichen Prozeß, der uns, so Husserl, jedoch aus der Lebenwelt *hinausführt*: Durch den Idealisierungsgedanken wird die Tischplatte der Lebenswelt sozusagen in eine ideal glatte und ebene Fläche verwandelt, die nun einer ganz anderen 'Welt' angehört, der Welt der Wissenschaft. Die Lebenswelt bleibt damit zwar *Grundlage* der Geometrie — Husserl bezeichnet sie als *Sinnesfundament* der Geometrie[5] —, aber mit dem Idealisierungsgedanken — den Husserl als eine 'große Erfindung' ansieht[6] — *verlassen* wir nach Husserl die Lebenswelt.

Nun ist es durchaus so, daß Husserl auch unsere Handlungspraxis in seine Betrachtungen einbezieht. Ich habe ja gerade auf die Praxis des Glatter- und Ebenermachens einer Tischplatte verwiesen, und Husserl selbst bezieht sich im Kontext der Geometrie häufig auf unsere 'praktische Feldmeßkunst', die — als vortheoretische, lebensweltliche Leistung — für die Geometrie Sinnesfundament sei.[7] Aber die Feldmeßkunst *verweist* nach Husserl höchstens auf die Geometrie, gehört ihr jedoch noch nicht an. Er sagt ausdrücklich, daß die praktische Feldmeßkunst von den geometrischen Idealitäten "nichts wußte"[8]. Gestehen wir dies Husserl einmal zu (obwohl ich es nicht wirklich glaube); aber natürlich lassen sich andere elementare Handlungen aufweisen, die mehr *symbolischen* Charakter besitzen und durch die uns durchaus ideale geometrische Gegenstände gegeben sein können. Aufgrund ihres elementaren Charakters haben solche Handlungen alles Recht der Welt, als *lebensweltliche* aufgefaßt zu werden — einschließlich der idealen Gegenstände, die sie uns präsentieren. Ein paradigmatisches Beispiel ist der junge Sklave in Platons *Menon*, der, indem er ein paar Linien zieht, entdeckt, wie man zu gegebenem Quadrat ein Quadrat mit doppelter Fläche konstruieren kann, und der dabei ohne Problem versteht, daß seine zeichnerische Konstruktion eine völlig *präzise* Verdoppelungskonstruktion für *ideale* Quadrate darstellt.[9]

Platon erklärt diese Leistung des Sklaven durch einen Wiedererinnerungs-Mythos; andere mögen sie naturwissenschaftlich zu erklären versuchen; aber einer Philosophie, die sich (sagen wir einmal) *emphatisch* auf den Begriff der Lebenswelt stützen möchte, sollte es genügen, die Einsichten des Sklaven einfach in der Lebenswelt zu *lokalisieren*, denn es gibt für sie keine tiefere Ebene, die wir heranziehen könnten. Jede vermeintlich tiefere Erklärung befände sich auf der *falschen begrifflichen Ebene*. Dies ist genau die Stelle, an der man sich mit dem Begriff der Lebenswelt von naturalistischen Ansätzen verabschiedet und die natürlich durch viel grundsätzlichere Überlegungen untermauert werden muß — Überlegungen, die ich hier sozusagen als Hintergrund voraussetze.

Zurück zum Sklaven. Obwohl er sich gänzlich in der Lebenswelt aufhält, können seine mathematischen Handlungen durchaus als Handlungen angesehen werden, die sich im Rahmen der Euklidischen Geometrie abspielen, also des vertrauten Euklidischen Konstruktions- und Beweis-Spiels mit Zirkel und Lineal. So wie der Zirkel und das Lineal selbst, gehören auch die elementareren Züge dieses Spiels der Lebenswelt an. *Nicht* zur Lebenswelt gehört allerdings der *axiomatische* Standpunkt Euklids. Er hat einen allzu theoretischen Charakter, was sich schon darin zeigt, daß aus Euklids Axiomen Theoreme bewiesen werden, die vom Standpunkt der Lebenswelt als völlig evident und keiner Rechtfertigung bedürftig erscheinen — etwa das Theorem, daß im gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie einander gleich sind.[10] Euklids Konstruktions-Spiel kann jedoch durchaus auch praktiziert und verstanden werden, ohne daß man den axiomatischen Standpunkt einnehmen müßte: nämlich einfach als eine mathematische Praxis, die zu neuen geometrischen Einsichten führt und durch die uns, auch im Falle von rein lebensweltlichen symbolischen Handlungen, die idealen Gegenstände der Geometrie gegeben sein können.[11]

Anhänger Husserl könnten einwenden, daß bei dieser Beschreibung des Sklaven die Rede von der 'Gegebenheit' der mathematischen Gegenstände dubios sei. Aber ich benutze an dieser Stelle einfach einen wichtigen Gedanken Freges aus dessen *Grundlagen der Arithmetik*: daß uns nämlich Gegenstände wie etwa Zahlen alleine durch den Gebrauch der Zahl*wörter* in mathematischen Aussagen 'gegeben' sein können[12]; und Entsprechendes kann dann auch von geometrischen Gegenständen gelten. Wer den Ausdruck "gegeben" hier nicht verwenden möchte, kann auch einfach vom *Gegenstandsbezug* der Zahlwörter und der Wörter der Geometrie sprechen, und die Fregesche Einsicht lautet dann, daß sich der Gegenstandsbezug dieser Wörter durch deren Rolle in ganzen Aussagen zeigen kann; oder allgemeiner — und nun Wittgensteinsch gesprochen und über Frege hinausgehend —, daß sich der Gegenstandsbezug der Wörter durch ihren *Gebrauch* zeigen kann und vielleicht auch zeigen muß. In dem wichtigen § 10 der *Philosophischen Untersuchungen* drückt Wittgenstein dies so aus: "Was *bezeichnen* nun die Wörter [unserer] Sprache? —

Was sie bezeichnen, wie soll ich das zeigen, es sei denn in der Art ihres Gebrauchs?"[13]. Die Auffassung, daß dem Sklaven im *Menon* alleine aufgrund seiner lebensweltlichen Handlungen der Bezug zu 'idealen', mathematischen Gegenständen zugesprochen werden darf, kann sicherlich gut verteidigt werden.

Jemand könnte einwenden wollen, daß das mathematische *Beweisen* nicht zur Lebenswelt gehöre: Zwar ist der raum-zeitliche *Vorgang*, der den jungen Sklaven zur geometrischen Einsicht führt — also das Zeichnen von Geraden und Kreisen, begleitet von lebensweltlich klingenden Aussagen — ein lebensweltlicher Vorgang; aber sollte nicht der *mathematische Beweis selbst* von diesem konkreten Beweis-*Vorgang* unterschieden werden? Wir betrachten einen mathematischen Beweis doch eher als etwas Unzeitliches, also, Husserlsch gesprochen, als eine 'Idealität', die von dem Beweis-Vorgang sozusagen nur 'nachgezeichnet' wird, mit dem Vorgang selbst jedoch keineswegs gleichgesetzt werden sollte. So sind z.B. unsere *Identitätskriterien* für Beweise ganz andere als unsere Identitätskriterien für Vorgänge. Hat Husserl nicht an *dieser* Stelle recht, die Mathematik außerhalb der Lebenswelt anzusiedeln?

Hier kommt ein anderer Gedanke Wittgensteins zu Hilfe. Wittgenstein hat die schöne Idee, mathematische Beweise mit *Bildern* zu vergleichen, und zwar Bildern *von* den Beweis-Vorgängen, wodurch diese Vorgänge sozusagen zu etwas Unzeitlichem erstarren. Diese Bilder bestehen in ihren beweisrelevanten Teilen aus Zeichen — arithmetischen Zeichen, algebraischen Zeichen, den bildhaften Zeichen des Eulidischen Konstruktions-Spiels, und so weiter —, und Wittgenstein faßt damit mathematische Beweise in ähnlicher Weise auf wie Hilbert in seiner Beweistheorie. "Ein *Beweis* ist eine *Figur*", sagt Hilbert als Beweistheoretiker, "die uns als solche *anschaulich* vorliegen muß"[14]. Ein Beweis ist, wie Hilbert erläutert, "ebenso wie ein Zahlzeichen, ein konkreter, überblickbarer Gegenstand"[15], und Hilbert bezeichnet die Mathematik dementsprechend als ein regelgeleitetes "Formelspiel"[16]. Hilberts Leitmotiv lautet: "*am Anfang* [...] *ist das Zeichen*"[17].

Wittgenstein stimmt mit all dem überein[18], fügt jedoch die entscheidende Idee hinzu — die zentrale Idee seiner Spätphilosophie —, daß diese Zeichen und Formeln ihre *Bedeutung* durch den *Gebrauch* erhalten, den wir von ihnen machen, und durch die gesamte symbolverwendenden *Praxis*, in der sie ihren Platz haben.[19] Auch die mathematischen *Ideen* und *Gedanken*, die durch diese Zeichen ausgedrückt werden, müssen sich dann in diesem Gebrauch manifestieren, wenn wir ihnen *objektiven Gehalt* zusprechen wollen.

Beweise mit Bildern zu vergleichen, ist Wittgensteins Methode, der Unzeitlichkeit von Beweisen gerecht zu werden, ohne platonistischen Mythen zum Opfer zu fallen. Das Herstellen und Verwenden von Bildern stellt aber sicherlich eine gängige lebensweltliche Praxis dar. Wittgensteins Vergleich räumt somit der Reflexion auf lebensweltlich Vertrautes einen bedeutenden Platz ein, wenn es darum geht, ein philosophisch befriedigendes Verständnis der Mathematik zu erlangen; und Vergleiche dieser Art sind überaus zahlreich in seiner Spätphilosophie. Er ist dabei immer völlig auf der Höhe lebensweltlicher Konkretheit. Im Falle des Bild-Vergleichs zum Beispiel schreibt er:

> Wenn ich sage »der Beweis ist ein Bild« — so kann man sich ihn als kinematographisches Bild denken.
>
> Den Beweis macht man ein für alle Mal.[20]

Das kinematographische Bild hält einen konkreten Vorgang der Beweis-Konstruktion auf einem Film fest, und auf diese Weise ist der Beweis 'ein für alle Mal gemacht', denn *dieser Film* kann nun immer wieder abgespult werden; so daß man geradezu sagen kann, der Film *sei* der Beweis: nicht im Sinn eines zeitlichen Vorgangs, sondern in dem *bei Filmen vertrauten*, *lebensweltlich vertrauten*, unzeitlichen Sinn.

Wittgenstein hebt dabei insbesondere den *anschaulichen* Charakter der Beweise hervor — und zwar im selben Sinn, in dem Hilbert in seiner Beweitheorie sagt (wie wir gerade gehört haben): "Ein *Beweis* ist eine *Figur*, die uns als solche *anschaulich* vorliegen muß". Das Wort "anschaulich" wird hier von Hilbert, und entsprechend auch von Wittgenstein, in einem völlig unphilosophischen, erneut lebensweltlichen Sinn gebraucht.[21] Gemeint sind einfach die sichtbaren Zeichenformen, aus denen der Beweis gebildet wurde. Und für Wittgenstein ist dieser Hinweis auf die 'Anschaulichkeit' der Beweise nur eine Erinnerung an die Art und Weise, wie wir Beweise in der Mathematik sowieso immer behandeln. Wenn nämlich jemand einen mathematischen Satz nicht akzeptiert, auch wenn er dessen vollständigen Beweis[22] gesehen hat, kann er seinen Widerstand nicht damit rechtfertigen, daß der Beweis noch nicht alles Relevante *zeige*, daß es da sozusagen noch etwas gäbe, das sich 'im Untergrund' abspielt (unbewußte geistige Vorgänge, etwa, oder gar Vorgänge im Gehirn) und zunächst noch geprüft werden müßte. Ein mathematischer Beweis zeichnet sich dadurch aus, daß in ihm alles Relevante auch sichtbar sein muß, oder daß wir zumindest auf Nachfrage alles Relevante ohne Probleme sichtbar machen können[23], und wer, wenn dies der Fall ist, den Beweis immer noch ablehnt, wird als jemand behandelt, der nicht *verstanden* hat, was ein mathematischer Beweis ist und was Mathematik auszeichnet. Alle unsere Gründe, die Richtigkeit und Überzeugungskraft eines Beweises anzuerkennen oder abzulehnen, müssen sich auf Dinge beziehen, die uns im Beweis — als *sichtbarer Gestalt von Zeichen-Figuren* — vor Augen sind oder vor Augen gebracht werden können.

Diese Art von Überlegung ließe sich noch lange fortsetzen, aber ich möchte sie an dieser Stelle abbrechen — nicht nur aus Zeitgründen, sondern auch, weil natürlich dem Einwand allzu großer Oberflächlichkeit begegnet werden muß. Sich nur auf das pure 'Formelspiel' zu konzentrieren, ohne dabei unser *Verstehen* jener Formeln in den Blick zu nehmen, mag für Hilberts Beweistheorie statthaft sein, weil man sich dort hauptsächlich für Konsistenzbeweise interessiert, in deren Fall es genügen mag, Formelspiele zu betrachten. Aber Wittgenstein hatte nichts dergleichen im Sinn. Aus welchem Grund sollten dann Wittgensteins so überaus formalistisch klingende Betrachtungen, wie ich sie bis jetzt dargestellt habe, ernst genommen werden? Ich denke, daß diese Betrachtungen deskriptiv angemessen sind; sie treffen tatsächlich bestehende, charakteristische Züge mathematischen Beweisens. Aber sie scheinen, wie gesagt, die eigentliche *Substanz* mathematischer Beweise, die sich nur in unserem *Verstehen* der Beweise offenbart, gar nicht zu treffen. Warum sollten sie dann wichtig sein? Ist die Konzentration auf Lebensweltliches vielleicht nur dadurch erkauft, daß man das eigentlich Wichtige ignoriert?

Interessanterweise gelingt es Wittgenstein jedoch, schon auf jener scheinbar oberflächlichen, formalistischen Ebene wichtige Konsequenzen zu ziehen, vor allem Konsequenzen im Hinblick auf logizistische oder mengentheoretische Reduktionsprogramme. Wenn es für Beweise wesentlich ist, daß sie für uns den genannten 'anschaulichen' Charakter aufweisen, schneiden die auf die Ebene des grundlegenden, rein logischen oder rein mengentheoretischen Vokabulars gebrachten mathematischen Beweise schlecht ab, denn ihnen fehlte gerade wegen ihrer gigantischen *Unübersichtlichkeit* die nötige Anschaulichkeit (falls wir sie überhaupt auf Papier bringen könnten, was faktisch meistens gar nicht der Fall ist). Sie haben also gar nicht das Recht, als "Beweise" deklariert zu werden, und deswegen haben die Grundlegungsprogramme selbst nicht wirklich das Recht, als 'grundlegend' zu gelten. Entsprechendes kann dann auch für computergestützte Beweise, wie den berüchtigten Beweis des Vier-Farben-Theorems, gesagt werden: Sie haben, erneut wegen der ihnen eigenen Unübersichtlichkeit, nicht das Recht, als "Beweise" bezeichnet zu werden. Auf diese Dinge kann ich hier nicht genauer eingehen.[24]

Zurück zum Thema "Verstehen". Es ist zentral für eine angemessene Philosophie der Mathematik, da sich mathematisches Verstehen, wie ich denke, tiefgreifend von anderen Arten des Verstehens unterscheidet. Wittgensteins Ansatz legt nahe, überwiegend auf diejenigen unserer *öffentlichen Handlungen* zu schauen, in denen sich das Verstehen *manifestiert*, also unsere Handlungen des konkreten *Umgangs* mit den mathematischen Symbolen und Formeln, und genau diese öffentlichen Handlungen sind sicherlich entscheidend für unsere Urteile, ob das Verstehen keine Irrtümer enthält, ob es echtes Verstehen ist oder nur vermeintliches. Andererseits wäre es, wie ich denke, ein Fehler, dabei das überaus reiche *geistige Innenleben* der Mathematiker zu ignorieren, das oft weit über das manifestierte Verstehen hinausgeht. Eine befriedigende Philosophie der Mathematik sollte *beides* im Blick haben: das öffentlich Manifestierte und das 'Innere'; und ich sehe in der *Klärung* der Beziehung zwischen beidem ein wirkliches philosophisches Problem. Es wäre zu lösen, um dem Phänomen "mathematisches Verstehen" gerecht zu werden, und insbesondere auch, um die Rolle des Lebensweltlichen bei mathematischem Verstehen angemessen zu begreifen.

Trotz solcher Komplexität — und trotz Husserl — sollte jedoch kein Zweifel bestehen, daß wirkliches mathematisches Verstehen auch schon auf lebensweltlicher Ebene vorkommt. Platons junger Sklave gelangt durch die paar Striche, die er zeichnet, zu der unabweisbaren Einsicht, daß das große, umfassende Quadrat aus lauter gleichgroßen Dreiecken zusammengesetzt ist und daß das über der Diagonale des gegebenen Quadrats errichtete Quadrat aus doppelt so vielen dieser Dreiecke besteht wie das gegebene selbst. Der Sklave *sieht* das ja (wie wir alle), und damit hat er den mathematischen Sachverhalt verstanden. Sein Verstehen manifestiert sich in seinen öffentlichen Handlungen (des Zeichnens und entsprechenden Urteilens), und nichts spricht dafür, in seinem geistigen Innenleben Elemente zu postulieren, die Lebensweltliches überschritten. (Dies ist gerade Platons, oder Sokrates', Pointe bei seiner Wahl eines *jungen Sklaven*!) Die Lebenswelt genügt in diesem Fall.

Wie jedoch steht es mit fortgeschritteneren und abstrakteren Fällen? Zweifellos überschreitet die Mathematik als Ganze das Lebensweltliche in großem Maße: etwa durch ihr axiomatisches Vorgehen (worauf ich schon hingewiesen habe), oder durch raffinierte und immer raffiniertere, und vor allem immer abstraktere, Begriffsbildungen; aber ich denke, daß auch in noch so abstrakten mathematischen Gefilden Lebensweltliches bei unserem *Verständnis* jener Gefilde immer noch eine beträchtliche Rolle spielt.

Lassen Sie mich dafür ein einziges, einfaches Beispiel geben. Es betrifft den Begriff der Funktion. Seien A und B Mengen und f eine Funktion von A nach B; symbolisch: $f : A \quad B$. Man begreift solch eine Funktion im ersten Verständnis normalerweise so, daß man sie sozusagen von links nach rechts liest (wie dies ja auch die gewählte Symbolik nahelegt!): jedem Element $x \in A$ wird durch f genau ein Element $y \in B$, das 'Bildelement' von x, zugeordnet. Man kann dann alle diese Bildelemente zu einer eigenen Menge aufsammeln (einer Teilmenge von B), die man als "Bild von f" bezeichnet; oder kurz: "Bild f". Indem man f als 'eindeutige Zuordnung von links nach rechts' auffaßt, die in B die Teilmenge Bild f aussortiert, hat man ein gewisses Verständnis von f gewonnen — allerdings nur ein relativ magereres. Zu einem reicheren Verständnis gelangt man, wenn man die Funktion f sozusagen 'von rechts nach links' liest, genauer: von Bild f zu A. Dies geht so: Ist $y \in$ Bild f, so sammelt man alle $x \in A$, die von f in dieses y abgebildet werden. Man nennt diese Menge "Faser von y bzgl. f". Die Faser von y bzgl. f besteht also aus allen Elementen von A, die durch f in y abgebildet werden. Man kann dann die Menge *sämtlicher Fasern* bilden. Nennen wir sie "A modulo f"; symbolisch: A/f. Es ist dann evident, daß die Elemente dieser Menge, also die Fasern bzgl. f, in einer 1-1-Korrespondenz mit den Elementen von Bild f stehen, denn jede solche Faser ist Faser *von einem bestimmten y* aus Bild f, und *an* jedem y aus Bild f *hängt* sozusagen dessen Faser. Eine bildliche, lebensweltliche Darstellung davon findet sich auf dem Handout, und sie zeigt diesen Sachverhalt auf unüberbietbar einleuchtende Weise. — Diese Art von 1-1-Korrespondenz ist in der Mathematik allgegenwärtig, und zwar bis hinein in die abstraktesten Bereiche, und ich vermute, jeder kompetente Mathematiker begreift sie über eine lebensweltliche Darstellung, wie Sie das Handout zeigt. Diese Darstellung scheint unabweisbar und lenkt das mathematische Denken.

Es liegt dann folgendes zweiteilige philosophische Projekt nahe: erstens, zu untersuchen, *wie weit* lebensweltliche Ideen in die Mathematik hineinreichen; und zweitens, zu untersuchen, genau *wo* und *wie* das Lebensweltliche in der Mathematik überschritten wird. Solche Untersuchungen wären meines Erachtens wichtig bei dem Bemühen, den eigenständigen Charakter der Mathematik angemessen begreifen, denn ich glaube, daß das Lebensweltliche für die Mathematik eine ganz andere Rolle spielt als etwa für die Naturwissenschaften. Die Naturwissenschaften können sich in ihrem Theoretisieren im Prinzip beliebig weit von der Lebenswelt entfernen: man denke an die seltsamen Aussagen der Relativitätstheorie und die noch seltsameren der Quantenmechanik. Es war übrigens einer der schlimmsten Fehler der Erlanger Schule, daß sie in ihrem Programm der 'Protophysik' Lebensweltliches auch in die naturwissenschaftliche Theoriebildung hineinzwingen wollte. Dieses Verfahren würde den Naturwissenschaften nicht gut bekommen. Im Falle der Mathematik liegt der Fall jedoch, wenn ich mich nicht irre, ganz anders! Dort reichen lebensweltliche Vorstellungen bis in die abstraktesten und theoretischsten Bereiche hinein. Husserls Rede von der Lebenswelt als *Untergrund* mag für die Naturwissenschaften angemessen sein, jedoch keinesfalls für die Mathematik. (An dieser Stelle zeigt sich übrigens eine bemerkenswerte Parallele zwischen der Mathematik und *ethischen* Theorien, die ebenfalls von Lebensweltlichem beherrscht sind und, wie ich vermute, sogar beherrscht sein müssen. Aber dies nur nebenbei.)

Zum Abschluß möchte ich noch darauf hinweisen, daß in den Betrachtungen, die ich hier angestellt habe, das Lebensweltliche auf zwei recht verschiedene Weisen in den Blick genommen wurde: erstens in seiner Wichtigkeit für unser *philosophisches Verstehen* des Phänomens Mathematik, etwa dessen, was man einen "mathematischen Beweis" nennt; und zweitens in seiner Wichtigkeit für die mathematischen Gegenstände und Sachverhalte selbst, eben im Hinblick auf die Rolle des

Lebensweltlichen beim *mathematischen Verstehen* dieser Gegenstände und Sachverhalte. Beides muß natürlich auseinander gehalten werden. Aber *gemeinsam* ist beidem, daß die Lebenswelt *nicht* nur die Rolle des 'Untergrundes' hat, sondern in beträchtlichem Maße *hineinreicht* in unser philosophisches und mathematisches Verstehen.

Literatur

Werke Wittgensteins und ihre Siglen

BGM *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Werkausgabe, Bd. 6, Suhrkamp, 1989.

PU *Philosophische Untersuchungen*, in Werkausgabe, Bd. 1, Suhrkamp, 1989.

ÜG *Über Gewißheit*, in Werkausgabe, Bd. 8, Suhrkamp, 1989.

Weitere Literatur

Einstein, Albert: 1949, "Autobiographisches/Autobiographical Notes", in *Albert Einstein: Philosopher Scientist, Vol. One*, hg. v. Paul Arthur Schilpp (*The Library of Living Philosophers, Vol. VII*), Third Edition, Open Court, 1969, S. 2-95.

Euclid: 1980, *Die Elemente*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt; zitiert als "*Elemente*".

Frege, Gottlob: 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik*, Felix Meiner, 1988; zitiert als "GA".

Hilbert, David: 1922, "Neubegründung der Mathematik", *Abhandl. aus dem Math. Seminar d. Hamb. Univ., Bd. 1*, S. 157-177 (auch in David Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen. Band III*, J. Springer, 1935, S. 157-177; und in *Hilbertiana*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1964, S. 12-32.

Hilbert, David: 1925, "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen 95*, S. 161-190 (auch in *Hilbertiana*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1964, S. 79-108).

Hilbert, David: 1928, "Die Grundlagen der Mathematik", *Abhandl. aus dem Math. Seminar d. Hamb. Univ., Bd. 6*, S. 65-85 (auch in David Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik*, Hamburger Mathematische Einzelschriften, Teubner, S. 1-21).

Hilbert, David: 1929, "Probleme der Grundlegung der Mathematik", *Mathematische Annalen 102*, 1-9.

Husserl, Edmund: 1954, *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie*, Den Haag 1954, 1962, 1976 (*Husserliana VI*); zitiert als "*Krisis*".

Mazur, Barry: 2004, *Imagining Numbers (particularly the square root of minus fifteen)*, Penguin Books.

Mühlhölzer, Felix: 2002, "Wittgenstein and Surprises in Mathematics", in *Wittgenstein and the Future of Philosophy: A Reassessment after 50 Years (Proceedings of the 24th International Wittgenstein-Symposium*, Kirchberg am Wechsel, 2001), hg. v. Rudolf Haller and Klaus Puhl, öbv&hpt Verlagsgesellschaft, S. 306-315.

Mühlhölzer, Felix: 2003, "Naturalismus und Lebenswelt", in *Deskriptive oder normative Wissenschaftsphilosophie?*, hg. v. Bernward Gesang, ontos Verlag, S. 49-73.

Mühlhölzer, Felix: 2005, "›A mathematical proof must be surveyable« — What Wittgenstein meant by this and what it implies", *Grazer Philosophische Studien 71*, 57-86.

Mühlhölzer, Felix: 2006, "Wittgenstein und der Formalismus", erscheint in einem Sammelband über Wittgensteins Philosophie der Mathematik, hg. v. Matthias Kroß, Parerga Verlag.

Sokolowski, Robert: 2000, *Introduction to Phenomenology*, Cambridge University Press.

Tait, William W.: 1986, "Truth and Proof: The Platonism of Mathematics", *Synthese 69*, 341-370.

[1] *Krisis*, S. 127.
[2] *Krisis*, S. 129.
[3] Vielleicht stehen manchmal 'Alltagstheorien' dahinter, die jedoch nicht den für Wissenschaft charakteristischen Prozeß kritischer Prüfung durchlaufen haben.
[4] Ich mache hier von der Darstellung in Sokolowski 2000, S. 148f., Gebrauch.
[5] *Krisis*, S. 48f..
[6] *Krisis*, S. 49.
[7] *Krisis*, S. 49.
[8] *Krisis*, S. 49.
[9] Und der dabei so nebenbei auch noch, auf geometrischem Wege, die Quadratwurzel aus 2 kennen lernt (und zwar in völliger, idealer Exaktheit, wie Geometrie uns so etwas eben zu liefern vermag). Siehe die schöne Darstellung in Mazur 2004, S. 7-12.
[10] *Elemente*, Erstes Buch, § 5 (L. 2).
[11] So wurde die Euklidische Geometrie z.B. vom 12-jährigen Einstein aufgefaßt, wie man in der Autobiographie in seinem Schilpp-Band nachlesen kann. Einstein stellt dort fest, daß bei solch einer Zugangsweise auch "die Gegenstände, von denen die Geometrie handelt, nicht von anderer Art zu sein [scheinen] als die Gegenstände der sinnlichen Wahrnehmung, 'die man sehen und greifen kann'" (Einstein 1949, S. 10). Einstein benutzt nicht den Begriff der Lebenswelt, aber es liegt nahe ihn so zu verstehen, daß er hier die idealen Gegenstände der Geometrie als selbstverständlichen Teil der Lebenswelt ansieht, weil die symbolischen Handlungen, durch die ihm jene Gegenstände gegeben sind, der Lebenswelt angehören.
[12] GA, § 62: "Wie soll uns denn eine Zahl gegeben sein, wenn wir keine Vorstellung oder Anschauung von ihr haben können? Nur im Zusammenhange eines Satzes bedeuten die Wörter etwas. Es wird also darauf ankommen, den Sinn eines Satzes zu erklären, in dem ein Zahlwort vorkommt."
[13] Siehe dazu auch Tait 1986 und Mühlhölzer 2006. — In PU § 10 hat Wittgenstein genau genommen nur eine bestimmte Sprache vor Augen, nämlich die in PU §§ 8f. beschriebene; aber die in PU § 10 ausgedrückte Auffassung kann vermutlich in den meisten oder allen Fällen von Sprachen verteidigt werden.
[14] Hilbert 1922, S. 169. Die Hervorhebung von "Figur" und "anschaulich" stammt von mir.
[15] Hilbert 1924, S. 179.
[16] Hilbert 1928, S. 15.
[17] Hilbert 1922, S. 163.
[18] Mehr ins Einzelne gehende Vergleiche zwischen den Positionen Hilberts und Wittgensteins — mit Blick sowohl auf die Ähnlichkeiten als auch die tiefen Unähnlichkeiten — finden sich in Mühlhölzer 2005 und 2006.
[19] So daß, streng genommen, Wittgensteins Leitmotiv eigentlich nicht lautet: »Am Anfang ist das Zeichen«, sondern, wie in ÜG § 402 von ihm aus Goethes *Faust* zitiert, »Im Anfang war die Tat«.
[20] BGM III § 22.
[21] Hilbert beruft sich an dieser Stelle manchmal auf Kant, aber dies ist meines Erachtens ein Selbstmißverständnis. Siehe dazu Mühlhölzer 2005 und 2006.

[22] "Vollständig" hier in einem praktischen Sinn verstanden, nicht z.B. im Sinne einer vollständigen logizistischen oder mengentheoretischen Reduktion.
[23] Wenn das Sichtbarmachen Probleme bereitet, liegt der Beweis eben noch nicht vor: er hat dann eben 'Lücken'.
[24] Genauere Überlegungen zu den Reduktionsprogrammen finden sich in Mühlhölzer 2005 und 2006.